به نام خدا

« بررسی مسائل مشتق و کاربرد آن در کتاب های درسی حسابان و حساب دیفرانسیل »

سعید حق جو
www.bumg.ir
Email:mathgroup_boushehr@yahoo.com

مقدمه:

در اوایل قرن ۱۷ میلادی پی یر فرما ریاضی دان فرانسوی وقتی دربارەی ماکزیمم و مینیمم نسبی توابع کار می کرد، متوجه شد که مماس بر منحنی در این نقاط موازی محور x ها می باشد. این پدیده وی را به حل مسألەی یافتن امتداد مماس‌ها بر منحنی در حالت کلی رهنمون داشت و این مطلب اساس مسألەی جدیدی به نام مشتق شد. مطالعات ارزشمند لایب نیتز و نیوتن در این زمینه که همزمان و دور از هم انجام شد به نتایج بسیار بزرگی رسید که امروزه این مبحث در آنالیز کلید اصلی حل بسیاری از مسائل مهم است.در این مقاله برخی از مباحث چالش برانگیز مشتق و کاربردهای آن در کتاب های حسابان و حساب دیفرانسیل درسی مورد بررسی قرار گرفته است.

الف) تعریف مشتق و خط مماس

تعریف(حسابان ص ۱۰۲): فرض کنید تابع f بر یک بازه حول نقطەی x_0 تعریف شده باشد، اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ موجود باشد، آن را مشتق تابع f در نقطەی x_0 می نامیم و با $f'(x_0)$ نمایش می دهیم.

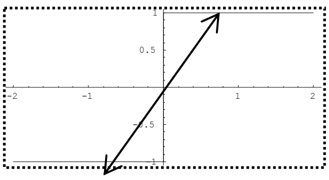
سؤال: آیا در تعریف به جای h می‌توان $\frac{1}{n}$ قرار داد که $n\to\infty$؟

خیر، زیرا اگر فرض کنیم $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{h}=0$ در حالی که تابع f در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیست.

سؤال: (حسابان ص ۱۰۵) :

تابعی مثال بزنید که در نقطەی x_0 پیوسته نیست و مشتق آن در نقطەی x_0 بی‌نهایت شود؟

الف) تابع $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ در نظر بگیرید. f در $x=0$ پیوسته نیست ولی $f'_+(0)=f'_-(0)=+\infty$.



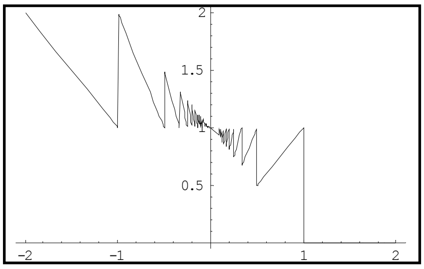
ب) تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در نظر بگیرید. f در $x=0$ پیوسته نیست ولی $f'_+(0)=f'_-(0)=+\infty$.

سؤال: آیا تابع $f(x)=\begin{cases} x\left[\dfrac{1}{x}\right] & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ **در نقطه‌ای به طول** $x=0$ **مشتق پذیر است؟**

خیر،

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\left[\dfrac{1}{x}\right]-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\left[\frac{1}{x}\right]-\frac{1}{x}\right)$$

حد فوق موجود نیست زیرا اگر دو دنباله‌ی $a_n=\dfrac{1}{n}$ و $b_n=\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$ در نظر بگیریم در این صورت $f(a_n)\to 0$ و $f(b_n)\to -\dfrac{1}{2}$.



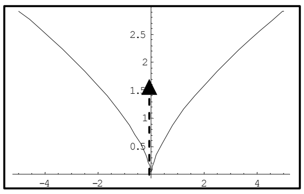
سؤال: تعریف خط مماس در حالت کلی بیان کنید؟

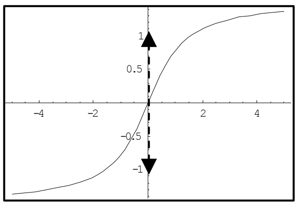
در صفحات ۱۸۶ و ۱۸۷ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال نوشته سیلورمن به طور کامل بیان شده است. درحقیقت خط مماس را به عنوان حد خطوط قاطع معرفی می کنیم.(البته به شرطی که تابع در نقطه‌ی تماس پیوسته باشد.)

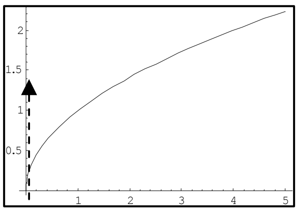
تذکر۱: (حساب دیفرانسیل و انتگرال صفحه ۹۹):

اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$ یا $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\infty$ آن گاه خط $x=a$ مماس بر منحنی در نقطه‌ی تماس است.

مثال : تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=\sqrt[3]{x}$ و $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ در مبدأ مختصات دارای مماس قائم به معادله‌ی $x=0$ هستند.(حسابان ص ۱۰۴ و ۱۰۵ و ۱۳۲)







قضیه(ص۱۰۶ حسابان و ۱۰۱ دیفرانسیل)(شرط لازم مشتق پذیری):

اگر تابع f در نقطه‌ی x_0 مشتق پذیر باشد، آن گاه f در نقطه‌ی x_0 پیوسته است.

عکس قضیه برقرار نیست.

سؤال: تابعی مثال بزنید که همه جا پیوسته باشد ولی در یک نقطه مشتق پذیر نباشد.

$f(x)=|x|$ در $x=0$

سؤال: تابعی مثال بزنید که همه جا پیوسته باشد ولی در دو نقطه مشتق پذیر نباشد.

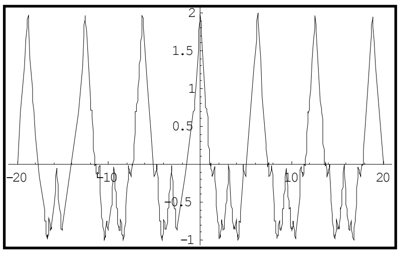
$f(x)=|x^2-1|$ در $x=\pm 1$

سؤال: تابعی مثال بزنید که همه جا پیوسته باشد ولی در سه نقطه مشتق پذیر نباشد.

$f(x)=||x|-1|$ در $x=\pm 1$ و $x=0$

سؤال: تابعی مثال بزنید که همه جا پیوسته باشد ولی هیچ جا مشتق پذیر نباشد.

تابع وایراشتراس $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(2^n x)$



سؤال: تابعی مثال بزنید که فقط در یک نقطه مشتق پذیر باشد.

$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in Q \\ 0 & x\notin Q \end{cases}$ در $x=0$

سؤال: تابعی مثال بزنید که فقط در دو نقطه مشتق پذیر باشد.

فرض کنیم $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in Q \\ 0 & x\notin Q \end{cases}$ در این صورت تعریف می کنیم:

$g(x)=(x-1)^2 f(x)$

تابع g فقط در $x=0$ و $x=1$ مشتق پذیر است.

سؤال: تابعی مثال بزنید که فقط در سه نقطه مشتق پذیر باشد.

فرض کنیم $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in Q \\ 0 & x\notin Q \end{cases}$ در این صورت تعریف می کنیم:

$g(x)=(x^2-1)^2 f(x)$

تابع g در $x=0$ و $x=\pm 1$ مشتق پذیر است.

نکاتی چند در مورد قضیه ۲ کتاب حساب دیفرانسیل(قاعده ۵ و٦ حسابان ص ۱۰۸)

۱- اگر f در x_0 مشتق ناپذیر و g در x_0 مشتق پذیر باشد آن گاه $f+g$ در x_0 مشتق پذیر نیست.

برهان خلف) فرض کنیم $h=f+g$ در x_0 مشتق پذیر باشد،آن‌گاه $f=h-g$ طبق قضیه کتاب در x_0 مشتق پذیر است که طبق فرض تناقض می باشد.

۲- اگر f و g در x_0 مشتق ناپذیر باشد آن گاه $f+g$ در x_0 ممکن است مشتق پذیر باشد یا نباشد.

فرض کنیم $f(x)=|x|$ و $g(x)=-|x|$ باشد در این صورت f,g در صفر مشتق ناپذیر می باشند در حالی که $f+g=0$ در صفر مشتق پذیر است.

۳- اگر f و g در x. مشتق ناپذیر باشد آن گاه $f\cdot g$ در x. ممکن است مشتق پذیر باشد یا نباشد.
فرض کنیم $f(x)=|x|$ و $g(x)=-|x|$ باشد در این صورت f,g در صفر مشتق ناپذیر می باشند در حالی که $f.g=-x^{2}$ در صفر مشتق پذیر است.

تمرین ص۱۱۴ حسابان:

دو تابع به نام های f و g را طوری مثال بزنید که f در $g(0)$ مشتق پذیر نبوده ولی g و $f\circ g$ در صفر مشتق پذیر است.

پاسخ۱: تعریف می کنیم $f(x)=[x]$ و $g(x)=x^{2}$ در این صورت $(fog)(x)=[x^{2}]$ در صفر مشتق پذیر است.

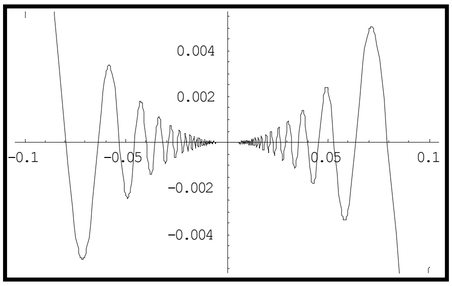
پاسخ۲: تعریف می کنیم $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^{2}$ در این صورت $(fog)(x)=x^{2}$ در صفر مشتق پذیر است.

تمرین ۵ حساب دیفرانسیل ص ۱۱۱:

مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ **را در** $x=0$ **بررسی کنید.**

تابع f در صفر پیوسته است و

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=0$$



تذکر: ص ۱۰۳ حساب دیفرانسیل

نقاط ابتدایی و انتهایی بازه ها جز نقاط مشتق ناپذیر هستند.

در برخی کتاب ها اگر مشتق راست f در a و مشتق چپ f در b موجود باشد، آن گاه a و b را جزء نقاط مشتق پذیر محسوب می کنند.(ص۱۴۰ دیفرانسیل ،پاورقی)

قضیه ۲: ص۱۴۰ حساب دیفرانسیل

اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ تعریف شده و نقطه‌ی c، $a<c<b$ نقطه اکسترمم مطلـق تـابع روی ایـن بازه باشد آن گاه c نقطه بحرانی است.

ب) صعودی و نزولی

حسابان ص ۱۱۸

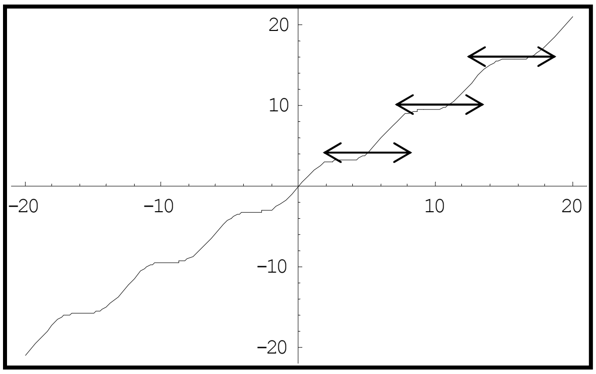
اگر تابع f در یک بازه مانند I مشتق پذیر باشد آن گاه شرط لازم و کافی برای آن که تابع در بازه‌ی I یـا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد آن است که مشتق تابع در آن بازه یا مثبت و یـا منفـی باشـد.(ممکـن اسـت مشتق به ازای یک یا تعدادی x از آن بازه صفر شود!)

نکات مهم جمله‌ی فوق:

اگر مشتق به ازای تعدادی متناهی یا نامتناهی شمارا نیز صفر شود ممکن است تابع اکیداً صعودی باشد.

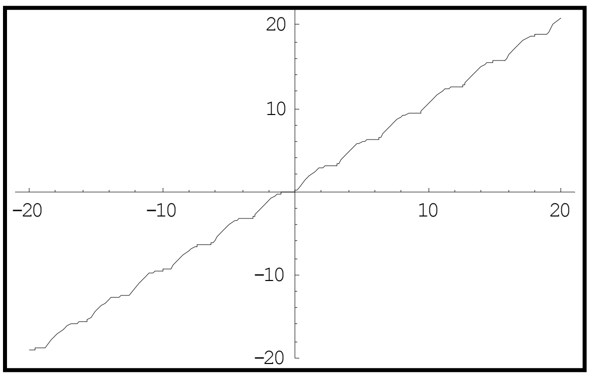
تابع $f(x)=x+\sin x$ را در نظر بگیرید.

$$f'(x)=١+\cos x=٠ \quad \Rightarrow \quad x=٢k\pi+\pi \quad , \ k\in Z$$



$f(x)=x+\sin x$

سؤال: تابعی مثال بزنید که در تعداد شمارا و نامتناهی نقطه مشتق پذیر نباشد ولی اکیداً صعودی باشد.

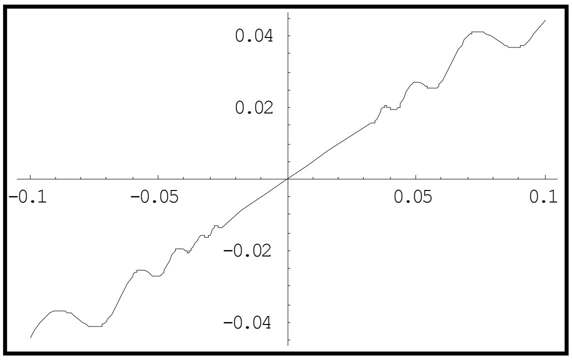


$f(x)=x+|\sin x|$

سؤال: آیا اگر $f'(a)>٠$ می توان گفت که حتماً f در یک همسایگی a صعودی است؟

پاسخ: خیر، اگر f' بر یک بازه‌ی I مثبت باشد، می توان گفت f بر I صعودی است.

اگر فرض کنیم $f(x)=\begin{cases} x^٢\sin\frac{١}{x} & x\neq ٠ \\ ٠ & x=٠ \end{cases}$ آن‌گاه قرار می دهیم: $g(x)=\frac{١}{٢}x+f(x)$



$g'(\cdot)=\frac{۱}{۲}>\cdot$ در حالی که تابع g حول صفر یکنوا نیست زیرا :

$$g'(x)=\frac{۱}{۲}+۲x\sin\frac{۱}{x}-\cos\frac{۱}{x}$$

$$g'(\frac{۱}{۲n\pi+\pi})=\frac{۳}{۲}>\cdot \quad \text{و} \quad g'(\frac{۱}{۲n\pi})=-\frac{۱}{۲}<\cdot$$

نتیجه ص ۱۴۷ حساب دیفرانسیل:

اگر تابع f در نقطه‌ی c پیوسته و در یک همسایگی محذوف c مشتق پـذیر باشـد و $\lim\limits_{x\to c} f'(x)=l$ آن گاه $f'(c)$ موجود و برابر l است.

توضیحات: تعبیر جمله‌ی فوق پیوسـتگی f' در $x=a$ را مـی رسـاند یعنـی تحـت چـه شـرایطی f' در $x=a$ پیوسته است.

اثبات: چون f در $x=c$ پیوسته است و در همسایگی محذوف cمشتق پذیر است پس:

$h>\cdot$ وجود دارد به طوری که:

f روی $[c-h,c]$ پیوسته و f روی $(c-h,c)$ مشتق پذیر است لذا طبق قضیه‌ی مقـدار میـانگین عـدد $c_۱$ متعلق به بازه‌ی $(c-h,c)$ وجود دارد به طوری که $f'(c_۱)=\frac{f(c)-f(c-h)}{h}$.

از طرفی f روی $[c,c+h]$ پیوسته و f روی $(c,c+h)$ مـشتق پـذیر اسـت لـذا طبـق قـضیه‌ی مقـدار میانگین عدد $c_۲$ متعلق به بازه‌ی $(c,c+h)$ وجود دارد به طوری که $f'(c_۲)=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$.

$$h\to \circ^+ \equiv c_۱\to c^-\,,\, c_۲\to c^+$$

$$\lim_{h\to\circ^+} f'(c_۱)=\lim_{h\to\circ^+}\frac{f(c)-f(c-h)}{h}=f'_-(c) \Rightarrow \lim_{c_۱\to c^-} f'(c_۱)=f'_-(c)=l$$

به همین ترتیب $f'_+(c)=l$ پس بنابراین $f'(c)$ موجود و برابر l است.

سؤال: مثالی از یک تابع ارائه دهید که f' در a موجود باشد ولی تابع f' پیوسته نباشد؟

پاسخ: تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در نظر بگیرید. $f'(0)=0$ در حالی که $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ موجود نمی باشد.

سؤال: تعریف نقطه عطف را به طور کامل بیان کنید؟

تعریف: نقطه $(a,f(a))$ متعلق به دامنه‌ی تابع را نقطه‌ی عطف می نامیم هرگاه:

الف) f در a دارای خط مماس باشد. ب) f'' حول a تغییر علامت دهد.

نکات مهم:

۱- اگر $f'(a)=\infty$ و f در a پیوسته باشد و f'' حول a تغییر علامت دهد،آن‌گاه f در a دارای عطف قائم است.

۲- اگر $f'(a)\neq\infty$، دو حالت داریم:

الف) $f''(a)$ موجود است: در این حالت زمانی f در a دارای عطف است که $f''(a)=0$ و f'' حول a تغییر علامت دهد.

ب) $f''(a)$ موجود نیست: در این حالت اگر f'' حول a تغییر علامت دهد، آن‌گاه f در a دارای عطف است.

پایان

منابع:

۱- تلگینی، محمود و دیگران، "حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱و۲"، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، تهران،۱۳۸۵

۲- بیژن زاده،محمد حسن و دیگران، "حسابان" ، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، تهران،۱۳۸۵

3- L.Leithold, The Calculus with Analytic Geometry, (Fifh Edition), Harper & Row(1986).

4- R.A. Silverman, Calculus with Analytic Geometry, Prentice-Hill(1985).